

整数问题：特殊的自然数之二 PDF转换可能丢失图片或格式，建议阅读原文

https://www.100test.com/kao_ti2020/156/2021_2022__E6_95_B4_E6_95_B0_E9_97_AE_E9_c64_156144.htm

A1 - 008 n 为怎样的自然数时，数 $3^{2n+1} - 2^{2n+1} - 6n$ 是合数？【题说】第二十四届（1990年）全苏数学奥林匹克十一年级题5【解】

$3^{2n+1} - 2^{2n+1} - 6n = (3^n - 2^n)(3^{n+1} + 2^{n+1})$ 当 $n > 1$ 时， $3^n - 2^n > 1$ ， $3^{n+1} + 2^{n+1} > 1$ ，所以原数是合数。当 $n = 1$ 时，原数是素数13。

A1 - 009 设 n 是大于6的整数，且 a_1, a_2, \dots

a_k 是所有小于 n 且与 n 互素的自然数，如果 $a_2 - a_1 = a_3 - a_2 = \dots = a_k - a_{k-1} > 0$ 求证： n 或是素数或是2的某个正整数次方。

【题说】第三十二届（1991年）国际数学奥林匹克题2。本题由罗马尼亚提供。

【证】显然 $a_1 = 1$ 。由 $(n-1, n) = 1$ ，得 $a_k = n-1$ 。令 $d = a_2 - a_1 > 0$ 。当 $a_2 = 2$ 时， $d = 1$ ，从而 $k = n-1$ ， n 与所有小于 n 的自然数互素。由此可知 n 是素数。当 $a_2 = 3$ 时， $d = 2$ ，从而 n 与所有小于 n 的奇数互素。故 n 是2的某个正整数次方。

设 $a_2 > 3$ 。 a_2 是不能整除 n 的最小素数，所以 $2|n$ ， $3|n$ 。由于 $n-1 = a_k = 1 + (k-1)d$ ，所以 $3|d$ 。又 $1+d = a_2$ ，于是 $3|1+d$ 。由此可知 $3|1+2d$ 。若 $1+2d < n$ ，则 $a_3 = 1+2d$ ，这时 $3|(a_3, n)$ 。矛盾。若 $1+2d \geq n$ ，则小于 n 且与 n 互素自然数的个数为2。设 $n = 2^m$ (> 6)。若 m 为偶数，则 $m+1$ 与 n 互质，若 m 为奇数，则 $m+2$ 与 m 互质。即除去 $n-1$ 与 1 外，还有小于 n 且与 n 互质的数。矛盾。综上所述，可知 n 或是素数或是2的某个正整数次方。

A1 - 010 试确定具有下述性质的最大正整数 A ：把从1001至2000所有正整数任作一个排列，都可从其中找出连续的10项，使这10项之和大于或等于 A 。【题

【说】 第一届（1992年）中国台北数学奥林匹克题6 . 【解】

设任一排列，总和都是 $1001 + 1002 + \dots + 2000 = 1500500$ ，将它分为100段，每段10项，至少有一段的和 15005 ，所以A

15005 另一方面，将1001 ~ 2000排列如下：2000 1001 1900

1101 1800 1201 1700 1301 1600 1401 1999 1002 1899 1102 1799 1202

1699 1302 1599 1402... .. 1901 1100 1801 1200

1701 1300 1601 1400 1501 1300并记上述排列为 a_1, a_2, \dots

, a_{2000} (表中第 i 行第 j 列的数是这个数列的第 $10(i-1) + j$ 项

, $1 \leq i \leq 20, 1 \leq j \leq 10$) 令 $S_i = a_i + a_{i+1} + \dots + a_{i+9}$ ($i = 1, 2,$

$\dots, 1901$) 则 $S_1 = 15005, S_2 = 15004$. 易知若 i 为奇数，则 S_i

$= 15005$ ；若 i 为偶数，则 $S_i = 15004$. 综上所述 $A = 15005$.

100Test 下载频道开通，各类考试题目直接下载。详细请访问

www.100test.com