整数问题：特殊的自然数之一 PDF转换可能丢失图片或格式，建议阅读原文

https://www.100test.com/kao_ti2020/156/2021_2022__E6_95_B4_E6_95_B0_E9_97_AE_E9_c64_156148.htm A1－001 假设n是自然数，d是2n2的正约数．证明：n2＋d不是完全平方．【题说】1953年匈牙利数学奥林匹克题2．【证】设2n2＝kd，k是正整数，如果 n2＋d是整数 x的平方，那么k2x2＝k2（n2＋d）＝n2（k2＋2k）但这是不可能的，因为k2x2与n2都是完全平方，而由k2＜k2＋2k＜（k＋1）2得出k2＋2k不是平方数．A1－002试证四个连续自然数的乘积加上1的算术平方根仍为自然数．【题说】1962年上海市赛高三决赛题 1．【证】四个连续自然数的乘积可以表示成n（n＋1）（n＋2）（n＋3）＝（n2＋3n）（n2＋8n＋2）＝（n2＋3n＋1）2－1因此，四个连续自然数乘积加上1，是一完全平方数，故知本题结论成立． A1－003已知各项均为正整数的算术级数，其中一项是完全平方数，证明：此级数一定含有无穷多个完全平方数．【题说】1963年全俄数学奥林匹克十年级题2．算术级数有无穷多项．【证】设此算术级数公差是 d，且其中一项 a＝m2（m∈N）．于是a＋（2km＋dk2）d＝（m＋kd）2对于任何k∈N，都是该算术级数中的项，且又是完全平方数．A1－004 求一个最大的完全平方数，在划掉它的最后两位数后，仍得到一个完全平方数（假定划掉的两个数字中的一个非零）．【题说】1964年全俄数学奥林匹克十一年级题 1．【解】设 n2满足条件，令n2＝100a2＋b，其中 0＜b＜100．于是 n＞10a，即 n≥10a＋1．因此b＝n2100a2≥20a＋1由此得 20a＋1＜100，所以a≤4．经验算，仅当a＝4时，n＝41满足条件．若n＞41

则n2－402≥422－402＞100．因此，满足本题条件的最大的完全平方数为412＝1681．A1－005 求所有的素数p，使4p2＋1和6p2＋1也是素数．【题说】1964年～1965年波兰数学奥林匹克二试题 1．【解】当p≡±1（mod 5）时，5|4p2＋1．当p≡±2（mod 5）时，5|6p2＋1．所以本题只有一个解p＝5．A1－006证明存在无限多个自然数a有下列性质：对任何自然数n，z＝n4＋a都不是素数．【题说】第十一届（1969年）国际数学奥林匹克题1，本题由原民主德国提供．【证】对任意整数m＞1及自然数n，有n4＋4m4＝（n2＋2m2）2－4m2n2＝（n2＋2mn＋2m2）（n2－2mn＋2m2）而 n2＋2mn＋2m2＞n2－2mn＋2m2＝（n－m）2＋m2≥m2＞1故n4＋4m4不是素数．取 a＝424，434，…就得到无限多个符合要求的 a．