

数学提高5:排列组合与集合的关系 PDF转换可能丢失图片或格式，建议阅读原文

[https://www.100test.com/kao\\_ti2020/235/2021\\_2022\\_\\_E6\\_95\\_B0\\_E5\\_AD\\_A6\\_E6\\_8F\\_90\\_E9\\_c70\\_235920.htm](https://www.100test.com/kao_ti2020/235/2021_2022__E6_95_B0_E5_AD_A6_E6_8F_90_E9_c70_235920.htm)

一、集合元素的个数以最常见的全排列为例，用1、2、3、4、5、6、7、8、9组成数字不重复的九位数，则每一个九位数都是集合A的一个元素，集合A中共有 $9!$ 个元素。以下我们用 $S(A)$ 表示集合A

的元素个数。二、集合的对应关系两个集合之间存在对应关系（以前学的函数的概念就是集合的对应关系）。如果集合A与集合B存在一一对应的关系，则 $S(A) = S(B)$

如果集合A中每个元素对应集合B中N个元素，则集合B的元素个数是A的N倍（严格的定义是把集合B分为若干个子集，各子集没有共同元素，且每个子集元素个数为N，这时子集成为集合B

的元素，而A的元素与B的子集有一一对应的关系，则 $S(B) = S(A) * N$

例1：用1、2、3、4、5、6、7、8、9组成数字不重复的六位数集合A为数字不重复的九位数的集合， $S(A) = 9!$

集合B为数字不重复的六位数的集合。把集合A分为子集的集合，规则为前6位数相同的元素构成一个子集。显然各子集没有共同元素。每个子集元素的个数，等于剩余的3

个数的全排列，即 $3!$ ！这时集合B的元素与A的子集存在一一对应关系，则 $S(A) = S(B) * 3!$

$S(B) = 9! / 3!$ ！这就是我们用以前的方法求出的 $P(9, 6)$

例2：从编号为1-9的队员中选6人组成一个队，问有多少种选法？设不同选法构成的集合为C，集合B为数字不重复的六位数的集合。把集合B分为子集的集合，规则为全部由相同数字组成的数组成一个子集，则每个子集都是某6个数的全排列，即每个子集有 $6!$ 个元素

。这时集合C的元素与B的子集存在一一对应关系，则  $S(B) = S(C) * 6!$   $S(C) = 9! / 3! / 6!$  这就是我们用以前的方法求出的  $C(9, 6)$  以上都是简单的例子，似乎不用弄得这么复杂。但是集合的观念才是排列组合公式的来源，也是对公式更深刻的认识。大家可能没有意识到，在我们平时数物品的数量时，说1, 2, 3, 4, 5, 一共有5个，这时我们就是在把物品的集合与集合(1, 2, 3, 4, 5)建立一一对应的关系，正是因为物品数量与集合(1, 2, 3, 4, 5)的元素个数相等，所以我们才说物品共有5个。我写这篇文章的目的是把这些潜在的思路变得清晰，从而能用它解决更复杂的问题。

例3：9个人坐成一圈，问不同坐法有多少种？9个人排成一排，不同排法有9！种，对应集合为前面的集合A 9个人坐成一圈的不同之处在于，没有起点和终点之分。设集合D为坐成一圈的坐法的集合。以任何人为起点，把圈展开成直线，在集合A中都对应不同元素，但在集合D中相当于同一种坐法，所以集合D中每个元素对应集合A中9个元素，所以  $S(D) = 9! / 9$  我在另一篇帖子中说的方法是先固定一个人，再排其他人，结果为8！。这个方法实际上是找到了一种集合A与集合D之间的对应关系。用集合的思路解决问题的关键就是寻找集合之间的对应关系，使一个集合的子集与另一个集合的元素形成一一对应的关系。

例4：用1、2、3、4、5、6、7、8、9组成数字不重复的九位数，但要求1排在2前面，求符合要求的九位数的个数。集合A为9个数的全排列，把集合A分为两个集合B、C，集合B中1排在2前面，集合C中1排在2后面。则  $S(B) S(C) = S(A)$  在集合B、C之间建立以下对应关系：集合B中任一元素1和2位置对调形成的数字，对应集合C中

相同数字。则这个对应关系为一一对应。因此  $S(B) = S(C) = 9! / 2$  以同样的思路可解出下题：从1、2、3...，9这九个数中选出3个不同的数作为函数  $y = ax^2 + bx + c$  的系数，且要求  $a > b > c$ ，问这样的函数共有多少个？

例5：M个球装入N个盒子的不同装法，盒子按顺序排列。这题我们已经讨论过了，我再用更形象的方法说说。假设我们把M个球用细线连成一排，再用N-1把刀去砍断细线，就可以把M个球按顺序分为N组。则M个球装入N个盒子的每一种装法都对应一种砍线的方法。而砍线的方法等于M个球与N-1把刀的排列方式（如两把刀排在一起，就表示相应的盒子里球数为0）。所以方法总数为  $C(M+N-1, N-1)$

例6：7人坐成一排照像，其中甲、乙、丙三人的顺序不能改变且不相邻，则共有\_\_\_\_\_排法。解：甲、乙、丙三人把其他四人分为四部分，设四部分人数分别为  $X_1, X_2, X_3, X_4$ ，其中  $X_1, X_4 \geq 0, X_2, X_3 \geq 1$  先把其余4人看作一样，则不同排法为方程  $X_1 + X_2 + X_3 + X_4 = 4$  的解的个数，令  $X_2 = Y_2 + 1, X_3 = Y_3 + 1$  化为求  $X_1 + Y_2 + Y_3 + X_4 = 2$  的非负整数解的个数，这与把2个球装入4个盒子的方法一一对应，个数为  $C(5, 3) = 10$  由于其余四人是不同的人，所以以上每种排法都对应4个人的全排列  $4!$ ，所以不同排法共有  $C(5, 3) * 4! = 240$ 种。

集合的方法运用熟练后，不需要每次具体设定集合，但头脑中要有清晰的对应关系。100Test 下载频道开通，各类考试题目直接下载。详细请访问 [www.100test.com](http://www.100test.com)