

数学提高1:从数列递推到N球配对问题 PDF转换可能丢失图片或格式，建议阅读原文

https://www.100test.com/kao_ti2020/235/2021_2022__E6_95_B0_E5_AD_A6_E6_8F_90_E9_c70_235924.htm

从数列递推到N球配对问题 本篇给出求简单递推数列通项公式的通用解法，并由此思路解一个老题以下记 $A(N)$ 为数列第 N 项 1、已知 $A_1=1$

， $A(N)=2A(N-1)+1$ ，求数列通项公式解：由题意， $A(N)+1=2[A(N-1)+1]$ 即 $A(N)+1$ 是以2为首项、2为公比的等比数列因此 $A(N)+1=2^N$ 数列通项公式为 $A(N)=2^N-1$

2、通用算法已知 $A_1=M$ ， $A(N)=P \cdot A(N-1)+Q$ ， $P \neq 1$ ，求数列通项公式解：设 $A(N)+X=P \cdot [A(N-1)+X]$ 解得 $X=Q/(P-1)$ 因此 $A(N)+Q/(P-1)$ 是以 $A_1+Q/(P-1)$ 为首项， P 为公比的等比数列由此可算出 $A(N)$ 通项公式

3、已知 A_1 和 A_2 ， $A(N)=P \cdot A(N-1)+Q \cdot A(N-2)$ ，求数列通项公式解题思路：设 $A(N)+X \cdot A(N-1)=Y \cdot [A(N-1)+X \cdot A(N-2)]$ 代入原式可得出两组解，对两组 X, Y 分别求出 $A(N)+X \cdot A(N-1)$ 的通项公式再解二元一次方程得出 $A(N)$ 注：可能只有一组解，但另有解决办法。

4、现在用上面的思路来解决一个著名的问题： N 个球和 N 个盒子分别编号从1到 N ， N 个球各放入一个盒子，求没有球与盒子编号相同的放法总数。

解：设 $A(N)$ 为球数为 N 时满足条件的放法（以下称无配对放法）总数，易知 $A_1=0$ ， $A_2=1$ 当 $N \geq 2$ 时，一号球共有 $N-1$ 种放法，假设1号球放入 X 号盒子在剩下的 $N-1$ 个球和 $N-1$ 个盒子中，如 X 号球正好放入1号盒子，问题等价于有 $N-2$ 个球的无配对放法，放法总数为： $A(N-2)$ 在剩下的 $N-1$ 个球和 $N-1$ 个盒子中，如 X 号球没有放入1号盒子，则可

以把X号球看作1号球，问题等价于有N-1个球的无配对放法，放法总数为： $A(N-1)$ 因此有 $A(N) = (N-1) * [A(N-1) - A(N-2)]$ 上式可变换为： $A(N) - NA(N-1) = -[A(N-1) - (N-1) * A(N-2)]$ 按等比数列得出： $A(N) - NA(N-1) = (-1)^N$ 上式除以N！得出： $\frac{A(N)}{N!} - \frac{A(N-1)}{(N-1)!} = \frac{(-1)^N}{N!}$ 把 $\frac{A(N)}{N!}$ 当作新的数列，把 $\frac{(-1)^N}{N!}$ 也作为一个数列则 $\frac{A(N)}{N!}$ 等于数列 $\frac{(-1)^N}{N!}$ 从第二项到第N项的和再乘以N 另外可得出：N球恰有K球与盒子配对的放法总数为： $C(N, K) * A(N-K)$ 100Test 下载频道开通，各类考试题目直接下载。详细请访问 www.100test.com