

高考数学基本不等式的应用与常见错误评析 PDF转换可能丢失图片或格式，建议阅读原文

https://www.100test.com/kao_ti2020/272/2021_2022__E9_AB_98_E8_80_83_E6_95_B0_E5_c65_272174.htm

基本不等式及应用是高中阶段一个重要的知识点；其方法灵活，应用广范。在学习过程中要求学生公式的条件、形式、结论等要熟练掌握，才能灵活运用。

一、基本不等式： $1. a, b \in \mathbb{R}, a^2 + b^2 \geq 2ab$ ，当且仅当 $a=b$ 等号成立， $2. a, b \in \mathbb{R}, ab \geq 2$ ，当且仅当 $a=b$ 等号成立。

二、问题1：设 $ab > 0$ ，则 $\frac{a}{b} + \frac{b}{a}$ 的取值范围是() (A) $(-\infty, -2] \cup [2, +\infty)$ (B) $(-\infty, -2] \cup [2, +\infty)$ (C) $[-2, +\infty)$ (D) $[2, +\infty)$

解题辨析：常见错误解法：因为 $\frac{a}{b}$ 与 $\frac{b}{a}$ 的积为定值，其和有最小值，即 $\frac{a}{b} + \frac{b}{a} \geq 2$ ，所以选择答案(D)。此解法是错的，是因为 $\frac{a}{b} > 0, \frac{b}{a} > 0$ 并不满足不等式 $ab \geq 2$ 中字母的条件；正确方法是：因 $ab > 0$ ，所以 $(\frac{a}{b} + \frac{b}{a}) > 0, (\frac{a}{b} + \frac{b}{a}) \geq 2$ ，即 $\frac{a}{b} + \frac{b}{a} \geq 2$ ，正确答案是(A)

问题2：已知 x 是正实数，求函数 $y = x^2 + \frac{1}{x}$ 的最小值？

解题辨析：常见错误解法：因 x 是正实数， $y = x^2 + \frac{1}{x} \geq 2$ ，所以 $y = x^2 + \frac{1}{x}$ 的最小值是2，当且仅当 $x^2 = \frac{1}{x}$ ，即 $x = \frac{1}{\sqrt{2}}$ 时，等号成立；此解法错误的原因是 x^2 与 $\frac{1}{x}$ 的积并不是定值。正确结论：对于两个正数 a 与 b ，当和为定值，当且仅当 $a=b$ 时，其积有最大值；当积为定值，当且仅当 $a=b$ 时，其和有最小值。

正确方法是：因 x 是正实数， $y = x^2 + \frac{1}{x} = x^2 + \frac{1}{2x} + \frac{1}{2x} \geq 3$ ，当且仅当 $x^2 = \frac{1}{2x}$ 等号成立，即 $x = \frac{1}{\sqrt{2}}$ 时， $y = x^2 + \frac{1}{x}$ 的最小值是3

问题3：已知 x, y 都是正实数，且 $x + 4y = 1$ ，求 $\frac{1}{x} + \frac{1}{y}$ 的最小值？

解题辨析：常见错误解法：因为 x, y 都是正实数 $1 = x + 4y \geq 2\sqrt{4xy} > 0, \frac{1}{x} + \frac{1}{y} \geq 2\sqrt{\frac{1}{xy}} > 0$ ，两式相乘得 $\frac{1}{x} + \frac{1}{y} \geq 8$ ，所以 $\frac{1}{x} + \frac{1}{y}$ 的最小值是8，此解法错误的原因是不等式 $x + 4y \geq 2\sqrt{4xy}$ 取等号的条件是 $x = 4y$ ，而不等式 $\frac{1}{x} + \frac{1}{y} \geq 2\sqrt{\frac{1}{xy}}$ 取等号的条件是 $x = y$ ，而这

两个条件不可能同时成立，因此- - 8中的等号不成立。正确方法是：x,y都是正实数，且 $x^2 + y^2 = 1$ ，所以- - $(x + y)^2 = 1 + 4xy = 1 + 4(x^2 + y^2) = 5$ ，当且仅当- -等号成立，即当且仅当 $x = y = \frac{\sqrt{5}}{2}$ 时，- -取得最小值是9

问题4：已知 $x, y, m, n \in \mathbb{R}$ ，且 $x^2 + y^2 = 2, m^2 + n^2 = 4$ ，求： $xm + yn$ 的最大值？解题辨析：常见错误解法： $xm + yn = \frac{(x^2 + m^2) + (y^2 + n^2)}{2} = \frac{(x^2 + y^2 + m^2 + n^2)}{2} = 3$ 即： $xm + yn$ 的最大值为3此解法错误的原因是当 $xm + yn$ 取得最大值3时， $x = m, y = n$ 要同时成立，即有 $x^2 + y^2 = m^2 + n^2$ ，而这是不可能的。正确解法：

因为 $x^2 + y^2 = 2, m^2 + n^2 = 4$ ，两式相乘 $8 = x^2 m^2 + n^2 y^2 + x^2 n^2 + y^2 m^2$
 $x^2 m^2 + n^2 y^2 \geq 2xy mn$ $8 \geq (xm + ny)^2$ $|xm + ny| \leq 2$ 即当且仅当 $xn = ym$ 时， $xm + yn$ 取最大值为2- 总之，基本不等式解决问题并不是万能的。学习过程中，要深刻理解基本不等式的内在实质，搞清其条件、公式、结论之间的辩证关系是关键。特别对于第二个基本不等式，我们常说“一正、二定、三等号”，其意义就在于此。

训练题 一、填空题：1.已知x,y都是正实数，且 $\frac{1}{x} + \frac{1}{y} = 1$ ，则 $x + y$ 最小值是_____，当且仅当 $x = \frac{1}{2}, y = \frac{1}{2}$ ，2.已知：abc均为实数，且 $a^2 + b^2 + c^2 = 1$ ，则 $ab + bc + ca$ 的最大值是_____ 最小值是_____。

3.已知：a,b都是正实数，且 $a + b = 1$ ，则 $(a - \frac{1}{2})^2 + (b - \frac{1}{2})^2$ 的最小值是_____。二、选择题：1.已知：a,b都是正实数，且 $a + b = 1$ ，则 $\frac{1}{a} + \frac{1}{b}$ 的最大值是() (A)2 (B)3 (C)4 (D)5 2.已知实数a, b, c满足：a + b + c = 5且 $a^2 + b^2 + c^2 = 11$ ，则实数c的范围是() (A) \mathbb{R} (B) $[-2, 3]$ (C) $[-3, 3]$ (D) $[-3, 2]$

三、解答题：1.已知矩形的面积与其周长相等，求其面积的最小值？ 2. 比较大小

：23 _____ 34, 56 _____ 67 根据上述结论作出推广，试写出一个有关于自然数n的不等式，并证明之。答案：一、填空题

: 1. xy 最小值是9, 当且仅当 $x=6, y=3$ 。 2. ab, bc, ca 的最大值是1, 最小值是--。 3. $(a-)^2 (b-)^2$ 的最小值是-, 二、 选择题: 1.(C), 2.(D) 三、 解答题: 1.16 2. $23 > 34, 56 > 67$ $n(n-1) > (n-1)(n-2)$, 只要证明: $(n-1)n(n-1)(n-2)1$ 即可。 华东模范中学 马兰军 100Test 下载频道开通, 各类考试题目直接下载。 详细请访问 www.100test.com