

整数问题：特殊的自然数之一初中升学考试 PDF 转换可能丢失图片或格式，建议阅读原文

https://www.100test.com/kao_ti2020/581/2021_2022__E6_95_B4_E6_95_B0_E9_97_AE_E9_c64_581044.htm

A1 - 001 假设 n 是自然数， d 是 $2n^2$ 的正约数。证明： $n^2 + d$ 不是完全平方。【题说】1953 年匈牙利数学奥林匹克题 2。【证】设 $2n^2 = kd$ ， k 是正整数，如果 $n^2 + d$ 是整数 x 的平方，那么 $k^2x^2 = k^2(n^2 + d)$

$= n^2(k^2 + 2k)$ 但这是不可能的，因为 k^2x^2 与 n^2 都是完全平方，而由 $k^2 < k^2 + 2k < (k + 1)^2$ 得出 $k^2 + 2k$ 不是平方数。A1

- 002 试证四个连续自然数的乘积加上 1 的算术平方根仍为自然数。【题说】1962 年上海市赛高三决赛题 1。【证】四个连续自然数的乘积可以表示成 $n(n + 1)(n + 2)(n + 3) =$

$(n^2 + 3n)(n^2 + 8n + 2) = (n^2 + 3n + 1)^2 - 1$ 因此，四个连续自然数乘积加上 1，是一完全平方数，故知本题结论成立。

A1 - 003 已知各项均为正整数的算术级数，其中一项是完全平方数，证明：此级数一定含有无穷多个完全平方数。【题说】1963 年全俄数学奥林匹克十年级题 2。算术级数有无穷多项。【证】设此算术级数公差是 d ，且其中一项 $a = m^2$ ($m \in \mathbb{N}$)。

于是 $a + (2km + dk^2)d = (m + kd)^2$ 对于任何 $k \in \mathbb{N}$ ，都是该算术级数中的项，且又是完全平方数。A1 - 004 求一个最大的完全平方数，在划掉它的最后两位数后，仍得到一个完全平方数（假定划掉的两个数字中的一个非零）。【题说】1964 年全俄数学奥林匹克十一年级题 1。【解】设 n^2 满足条件，令 $n^2 = 100a^2 + b$ ，其中 $0 < b < 100$ 。于是 $n > 10a$ ，即 $n \geq 10a + 1$ 。因此 $b = n^2 - 100a^2 \geq 20a + 1$ 由此得 $20a + 1 < 100$ ，所以 $a \leq 4$ 。经验算，仅当 $a = 4$ 时， $n = 41$ 满足条件。若 $n > 41$

则 $n^2 - 402$ $422 - 402 > 100$. 因此 , 满足本题条件的最大的完全平方数为 $412 = 1681$. A1 - 005 求所有的素数 p , 使 $4p^2 + 1$ 和 $6p^2 + 1$ 也是素数 . 【题说】 1964年 ~ 1965年波兰数学奥林匹克二试题 1 . 【解】 当 $p \equiv \pm 1 \pmod{5}$ 时 , $5 | 4p^2 + 1$. 当 $p \equiv \pm 2 \pmod{5}$ 时 , $5 | 6p^2 + 1$. 所以本题只有一个解 $p = 5$. A1 - 006 证明存在无限多个自然数 a 有下列性质 : 对任何自然数 n , $z = n^4 + a$ 都不是素数 . 【题说】 第十一届 (1969年) 国际数学奥林匹克题 1 , 本题由原民主德国提供 . 【证】 对任意整数 $m > 1$ 及自然数 n , 有 $n^4 + 4m^4 = (n^2 + 2m^2)^2 - 4m^2n^2 = (n^2 + 2mn + 2m^2)(n^2 - 2mn + 2m^2)$ 而 $n^2 + 2mn + 2m^2 > n^2 - 2mn + 2m^2 = (n - m)^2 + m^2$ $m^2 > 1$ 故 $n^4 + 4m^4$ 不是素数 . 取 $a = 424, 434, \dots$ 就得到无限多个符合要求的 a . 100Test 下载频道开通 , 各类考试题目直接下载 . 详细请访问 www.100test.com