

整数问题：特殊的自然数之一 中考考试 PDF 转换可能丢失图片或格式，建议阅读原文

[https://www.100test.com/kao\\_ti2020/622/2021\\_2022\\_\\_E6\\_95\\_B4\\_E6\\_95\\_B0\\_E9\\_97\\_AE\\_E9\\_c64\\_622315.htm](https://www.100test.com/kao_ti2020/622/2021_2022__E6_95_B4_E6_95_B0_E9_97_AE_E9_c64_622315.htm)

A1 - 001 假设  $n$  是自然数， $d$  是  $2n^2$  的正约数。证明： $n^2 + d$  不是完全平方。【题说】1953 年匈牙利数学奥林匹克题 2。【证】设  $2n^2 = kd$ ， $k$  是正整数，如果  $n^2 + d$  是整数  $x$  的平方，那么  $k^2x^2 = k^2(n^2 + d)$

$= n^2(k^2 + 2k)$  但这是不可能的，因为  $k^2x^2$  与  $n^2$  都是完全平方，而由  $k^2 < k^2 + 2k < (k + 1)^2$  得出  $k^2 + 2k$  不是平方数。A1 - 002 试证四个连续自然数的乘积加上 1 的算术平方根仍为自然数。【题说】1962 年上海市赛高三决赛题 1。【证】四个连续自然数的乘积可以表示成  $n(n + 1)(n + 2)(n + 3) = (n^2 + 3n)(n^2 + 8n + 2) = (n^2 + 3n + 1)^2 - 1$  因此，四个连续自然数乘积加上 1，是一完全平方数，故知本题结论成立。

A1 - 003 已知各项均为正整数的算术级数，其中一项是完全平方数，证明：此级数一定含有无穷多个完全平方数。【题说】1963 年全俄数学奥林匹克十年级题 2。算术级数有无穷多项。【证】设此算术级数公差是  $d$ ，且其中一项  $a = m^2$  ( $m \in \mathbb{N}$ )。于是  $a + (2km + dk^2)d = (m + kd)^2$  对于任何  $k \in \mathbb{N}$ ，都是该算术级数中的项，且又是完全平方数。A1 - 004 求一个最大的完全平方数，在划掉它的最后两位数后，仍得到一个完全平方数（假定划掉的两个数字中的一个非零）。【题说】1964 年全俄数学奥林匹克十一年级题 1。【解】设  $n^2$  满足条件，令  $n^2 = 100a^2 + b$ ，其中  $0 < b < 100$ 。于是  $n > 10a$ ，即  $n \geq 10a + 1$ 。因此  $b = n^2 - 100a^2 \geq 20a + 1$  由此得  $20a + 1 < 100$ ，所以  $a \leq 4$ 。经验算，仅当  $a = 4$  时， $n = 41$  满足条件。若  $n > 41$

则  $n^2 - 402$   $422 - 402 > 100$  . 因此 , 满足本题条件的最大的完全平方数为  $412 = 1681$  . A1 - 005 求所有的素数  $p$  , 使  $4p^2 + 1$  和  $6p^2 + 1$  也是素数 . 【题说】 1964年 ~ 1965年波兰数学奥林匹克二试题 1 . 【解】 当  $p \equiv \pm 1 \pmod{5}$  时 ,  $5 | 4p^2 + 1$  . 当  $p \equiv \pm 2 \pmod{5}$  时 ,  $5 | 6p^2 + 1$  . 所以本题只有一个解  $p = 5$  . A1 - 006 证明存在无限多个自然数  $a$  有下列性质 : 对任何自然数  $n$  ,  $z = n^4 + a$  都不是素数 . 【题说】 第十一届 ( 1969年 ) 国际数学奥林匹克题 1 , 本题由原民主德国提供 . 【证】 对任意整数  $m > 1$  及自然数  $n$  , 有  $n^4 + 4m^4 = (n^2 + 2m^2)^2 - 4m^2n^2 = (n^2 + 2mn + 2m^2)(n^2 - 2mn + 2m^2)$  而  $n^2 + 2mn + 2m^2 > n^2 - 2mn + 2m^2 = (n - m)^2 + m^2$   $m^2 > 1$  故  $n^4 + 4m^4$  不是素数 . 取  $a = 424, 434, \dots$  就得到无限多个符合要求的  $a$  . 100Test 下载频道开通 , 各类考试题目直接下载 . 详细请访问 [www.100test.com](http://www.100test.com)